

58. Relaxationszeitspektrum bei Systemen mit beliebig vielen, teils in Serie, teils parallel wirkenden, mit Reibung belasteten elastischen Zusammenhaltsmechanismen

von Werner Kuhn.

(4. I. 47.)

In einer kürzlich erschienenen Arbeit¹⁾ wurde gezeigt, wie das Relaxationszeitspektrum von kautschukartigen Stoffen aus der Fließkurve bestimmt werden kann und wie die Kenntnis dieses Spektrums dazu verwendet werden kann, um Aussagen über weitere Eigenschaften, insbesondere über das viskose Verhalten zu gewinnen. Ausgangspunkt der Betrachtung war die Annahme, dass die pro cm^2 des Versuchskörpers wirkende Spannung σ , welche in einem Zeitpunkt t nach rasch erzeugter Dehnung $\Delta l/l = \alpha$ beobachtet wird, zu bestimmen sei aus der Gleichung

$$E = \frac{\sigma}{\alpha} = \sum_i E_{i0} e^{-\frac{t}{\tau_i}} \quad (1)$$

Die Grössen E_{i0} haben wir als Grundwerte der Teilelastizitätsmoduln, die τ_i als die zugehörigen Relaxationszeiten bezeichnet, während $E(t)$ der von der Zeit abhängige Elastizitätsmodul der Substanz ist. Für den Fall eines kontinuierlichen Relaxationszeitspektrums wäre (1) zu ersetzen durch das entsprechende Integral

$$E = \int_0^{\infty} \frac{dE_v}{d\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} d\tau \quad (2)$$

Nachdem in der genannten Arbeit die theoretische und praktische Bedeutung der Kenntnis eines solchen Relaxationszeitspektrums besprochen wurde, liegt es nahe, nach den genaueren Voraussetzungen zu fragen, unter denen eine durch Gleichung (1) gegebene Abhängigkeit des Elastizitätsmoduls von der Zeit grundsätzlich auftritt.

Wir zeigen nachstehend, dass ein solcher Verlauf und damit ein Relaxationszeitspektrum von der durch Gleichung (1) oder (2) gekennzeichneten Art immer auftritt, wenn beliebig viele, voneinander beliebig verschiedene elastische Federn mit beliebig vielen Reibungsmechanismen teils in Serie, teils parallel zu einem mechanischen System zusammengefasst sind.

Der spezielle Fall, dass beliebig viele elastische Federn mit beliebig anzunehmenden Reibungselementen sämtlich in Serie zueinander geschaltet sind, ist in einer kürzlichen Arbeit allgemein be-

¹⁾ W. Kuhn, O. Künzle und A. Preissmann, *Helv.* **30**, 307, 464 (1947).

handelt worden¹⁾). In diesem Falle reduziert sich (1) auf einen einzigen Term, also einen Grundwert und eine Relaxationszeit für das Gesamtsystem²⁾).

Im Falle zweier parallel geschalteter Mechanismen, von denen jeder mit einem Reibungselement ausgestattet ist, ist die Antwort ebenfalls sofort anzugeben. Sei für den ersten Zusammenhaltsmechanismus J_1 die Härtekonstante und τ_1 die Relaxationszeit, so gilt im Zeitpunkt t nach rasch erzeugter Deformation für die auf den Endpunkt P_1 des ersten Mechanismus wirkende Kraft (siehe Fig. 1)

$$\mathfrak{R}_1 = J_1 \Delta h e^{-\frac{t}{\tau_1}} \quad (3)$$

und für die auf den Endpunkt des zweiten Mechanismus wirkende Kraft

$$\mathfrak{R}_2 = J_2 \Delta h e^{-\frac{t}{\tau_2}} \quad (4)$$

Man sieht sofort, dass die auf die parallel geschalteten Mechanismen im Zeitpunkt t nach Erzeugung einer gemeinsamen Deformation Δh wirkende Kraft einfach gleich der Summe von (3) und (4) ist. Wir erhalten also einen zweigliedrigen Ausdruck vom Typus (1).

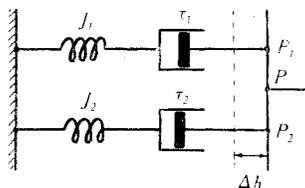


Fig. 1.

Als nächst komplizierteres System betrachten wir den Fall Fig. 2. In Serie zu dem in Fig. 1 betrachteten System von 2 parallel geschalteten Mechanismen liegt eine dritte elastische Feder mit einem (dritten) Reibungselement.

Es werde der Punkt P_3 rasch um Δh_3 verschoben und anschliessend relativ zur festen Wand W festgehalten. Nach Erzeugung der

¹⁾ *W. Kuhn und H. Kuhn, Helv. 29, 830 (1946) insbes. S. 841—844.*

²⁾ Es sei auch auf eine Arbeit von *T. Alfrey und P. Doty* verwiesen (*J. Appl. Phys. 16, 700 (1945)*) in welcher verschiedene Möglichkeiten der quantitativen Beschreibung relaxierender Systeme nebeneinander gestellt werden unter Angabe der Formeln, mit Hilfe derer die verschiedenen Darstellungsmöglichkeiten ineinander übergeführt werden können. Die in jener Arbeit stark diskutierte Beschreibung durch sogenannte *Voigt'sche Modelle* ist in der vorliegenden Arbeit nicht näher diskutiert. Ein *Voigt'scher Mechanismus* besteht aus einer elastischen Feder und einem parallel dazu wirkenden Dämpfungsmechanismus; wir würden einen solchen Mechanismus erhalten, wenn wir am Modell Fig. 1 beispielsweise die Feder J_2 und die Dämpfung τ_1 weglassen würden. Ein solcher Mechanismus würde bei sehr rascher Dehnung eine unendlich grosse Rückstellkraft geben, eine Eigenschaft, welche den in hochpolymeren Substanzen vorkommenden Zusammenhaltsmechanismen sicher nicht zukommt. Es ist dies der Grund, weshalb wir eine Darstellung durch *Voigt'sche Modelle* [welche übrigens eine Entartung der *Maxwell'schen Modelle* darstellen] nicht in Betracht gezogen haben.

Deformation und auch in jedem beliebigen späteren Zeitpunkt muss die auf den Punkt P (Mitte in Fig. 2) wirkende Kraft gleich 0 sein, also

$$\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2 - \mathfrak{R}_3 = 0 \tag{5}$$

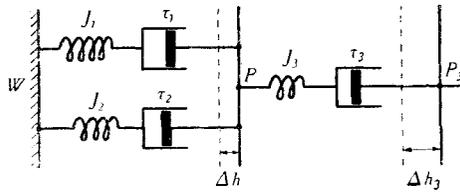


Fig. 2.

Ist Δh die Verschiebung des Punktes P aus der Ruhelage, so ist im Zeitpunkte $t = 0$ nach Erzeugung der Verschiebung Δh_3 am Punkte P_3 :

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_{10} &= J_1 \Delta h \\ \mathfrak{R}_{20} &= J_2 \Delta h \\ \mathfrak{R}_{30} &= J_3 (\Delta h_3 - \Delta h) \end{aligned} \tag{6}$$

Da $\mathfrak{R}_1 + \mathfrak{R}_2$ einerseits, \mathfrak{R}_3 andererseits im allgemeinen verschieden rasch abklingen, wird Δh den aus (5) und (6) für $t = 0$ folgenden Wert nicht beibehalten; es wird somit im allgemeinen Δh eine Funktion der Zeit t sein. Es ist also Δh im allgemeinen von Null verschieden. Für die im Zeitintervall t bis $t + dt$ erfolgende Änderung der Kräfte \mathfrak{R}_1 , \mathfrak{R}_2 und \mathfrak{R}_3 gilt dann auf Grund der Relaxation und auf Grund der Längenänderung Δh zusammen:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathfrak{R}_1}{dt} &= -\frac{\mathfrak{R}_1}{\tau_1} + J_1 \Delta \dot{h} \\ \frac{d\mathfrak{R}_2}{dt} &= -\frac{\mathfrak{R}_2}{\tau_2} + J_2 \Delta \dot{h} \\ \frac{d\mathfrak{R}_3}{dt} &= -\frac{\mathfrak{R}_3}{\tau_3} - J_3 \Delta \dot{h} \end{aligned} \tag{7}$$

Wegen (5) muss jetzt

$$\frac{d\mathfrak{R}_1}{dt} + \frac{d\mathfrak{R}_2}{dt} - \frac{d\mathfrak{R}_3}{dt}$$

gleich Null sein und damit folgt aus (7), zur Bestimmung von $\Delta \dot{h}$:

$$\Delta \dot{h} = \left(\frac{\mathfrak{R}_1}{\tau_1} + \frac{\mathfrak{R}_2}{\tau_2} - \frac{\mathfrak{R}_3}{\tau_3} \right) \frac{1}{J_1 + J_2 + J_3} \tag{8}$$

Indem wir dies in (7) einsetzen, erhalten wir zur Bestimmung der Zeitabhängigkeit der Kräfte \mathfrak{R}_1 , \mathfrak{R}_2 und \mathfrak{R}_3 das System von linearen, homogenen Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathfrak{R}_1}{dt} &= \frac{\mathfrak{R}_1}{\tau_1} \left[-1 + \frac{J_1}{J_1 + J_2 + J_3} \right] + \frac{\mathfrak{R}_2}{\tau_2} \frac{J_1}{J_1 + J_2 + J_3} - \frac{\mathfrak{R}_3}{\tau_3} \frac{J_1}{J_1 + J_2 + J_3} \\ \frac{d\mathfrak{R}_2}{dt} &= \frac{\mathfrak{R}_1}{\tau_1} \frac{J_2}{J_1 + J_2 + J_3} + \frac{\mathfrak{R}_2}{\tau_2} \left[-1 + \frac{J_2}{J_1 + J_2 + J_3} \right] - \frac{\mathfrak{R}_3}{\tau_3} \frac{J_2}{J_1 + J_2 + J_3} \\ \frac{d\mathfrak{R}_3}{dt} &= -\frac{\mathfrak{R}_1}{\tau_1} \frac{J_3}{J_1 + J_2 + J_3} - \frac{\mathfrak{R}_2}{\tau_2} \frac{J_3}{J_1 + J_2 + J_3} + \frac{\mathfrak{R}_3}{\tau_3} \left[-1 + \frac{J_3}{J_1 + J_2 + J_3} \right] \end{aligned} \tag{9}$$

Die Lösung eines solchen Systems von linearen, homogenen Differentialgleichungen ist nun ganz allgemein vom Typus von Gleichung (1), also:

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}_1 &= a_{11} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + a_{12} e^{-\frac{t}{\tau_2}} + a_{13} e^{-\frac{t}{\tau_3}} \\ \mathfrak{R}_2 &= a_{21} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + a_{22} e^{-\frac{t}{\tau_2}} + a_{23} e^{-\frac{t}{\tau_3}} \\ \mathfrak{R}_3 &= a_{31} e^{-\frac{t}{\tau_1}} + a_{32} e^{-\frac{t}{\tau_2}} + a_{33} e^{-\frac{t}{\tau_3}}\end{aligned}\quad (10)$$

wobei die a_{ik} sowie die τ_i' konstante, aus den Koeffizienten der Gleichung (9) zu bestimmende Grössen sind. Damit ist gezeigt, dass bei dem in Fig. 2 vorgegebenen mechanischen System die auf den Endpunkt wirkende Kraft \mathfrak{R}_3 grundsätzlich den in Formel (1) beschriebenen Verlauf besitzen wird.

Ausserdem können wir leicht überblicken, wie diese Betrachtungen und die Ergebnisse zu verallgemeinern sind auf den Fall eines Systems, welches aus beliebig vielen elastischen Federn mit zugehörigen Reibungselementen besteht und welches auf der einen Seite an einer festen Wand (W in Fig. 2) verankert ist, auf der andern Seite durch Bewegung eines Punktes P_n (P_3 in Fig. 2) als Gesamtheit mechanisch-elastisch beansprucht werden kann.

Für jede der n in dem System enthaltenen Federn mit zugehörigem Reibungselement gilt eine zu (7) analoge Gleichung, etwa für die i^{te} Feder

$$\frac{d\mathfrak{R}_i}{dt} = -\frac{\mathfrak{R}_i}{\tau_i} + J_i \Delta h_i \quad (11)$$

wobei

$$\Delta h_i = h_{ir} - h_{il} \quad (11a)$$

ist, wenn h_{ir} und h_{il} die Geschwindigkeit ist, mit welcher sich der in Fig. 2 rechts bzw. links von der Feder liegende, das System der betrachteten Feder plus Reibungselement begrenzende Punkt bewegt. Für Feder 1 und 2 in Fig. 2 war $h_{il} = 0$, für Feder 3 $h_{ir} = 0$. Für jeden derartigen Begrenzungspunkt, z. B. für den rechts liegenden Begrenzungspunkt gilt im allgemeinen Fall die Bedingung, dass entweder h_{ir} gleich Null ist [dann, wenn der Begrenzungspunkt entweder mit der festen Wand (W in Fig. 2) oder mit dem Punkt P_n (P_3 in Fig. 2) zusammenfällt], oder aber, dass die Summe der in diesem Punkt angreifenden Kräfte gleich 0 ist, eine Bedingung analog zu Beziehung 5. Diese Bedingungen haben also etwa die Form

$$\mathfrak{R}_i + \mathfrak{R}_{i+1} + \dots + \mathfrak{R}_{i+r} - \mathfrak{R}_{i+r+1} - \dots - \mathfrak{R}_{i+r+s} = 0 \quad (12)$$

oder, nach t differenziert

$$\mathfrak{R}_i + \mathfrak{R}_{i+1}' + \dots + \mathfrak{R}_{i+r}' - \mathfrak{R}_{i+r+1}' - \dots - \mathfrak{R}_{i+r+s}' = 0 \quad (12a)$$

Setzen wir (11) unter Berücksichtigung von (11a) in (12a) ein, so erhalten wir Gleichungen von der Form

$$-\frac{\mathfrak{R}_i}{\tau_i} - \frac{\mathfrak{R}_{i+1}}{\tau_{i+1}} - \dots - \frac{\mathfrak{R}_{i+r}}{\tau_{i+r}} + \frac{\mathfrak{R}_{i+r+1}}{\tau_{i+r+1}} + \dots + \frac{\mathfrak{R}_{i+r+s}}{\tau_{i+r+s}} + J_i h'_{i,r} - J_i h'_{i,1} - J_{i-1} h'_{i,r} \quad (13)$$

$$+ J_{i+1} h'_{i+1,1} + \dots = 0$$

Für jeden andern (zum Punkte P von Fig. 2 analogen) Punkt, in welchem mehrere Federn mit zugehörigem Dämpfungsmechanismus zusammengeführt sind, ergibt sich eine zu (12) bzw. zu (13) analoge Beziehung, insgesamt also zur Bestimmung der Grössen $h'_{i,1}$ und $h'_{i,r}$ ein System von linearen Gleichungen von der Form

$$\left. \begin{aligned} a_{11,1} h'_{11} + a_{21,1} h'_{21} + \dots + a_{n1,1} h'_{n1} + a_{1r,1} h'_{1r} + a_{2r,1} h'_{2r} + \dots + a_{nr,1} h'_{nr} &= c_1 \\ a_{11,2} h'_{11} + a_{21,2} h'_{21} + \dots + a_{n1,2} h'_{n1} + a_{1r,2} h'_{1r} + a_{2r,2} h'_{2r} + \dots + a_{nr,2} h'_{nr} &= c_2 \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

wobei die $a_{j1,s}$ nur von den Härtekonstanten J_i abhängen, während die Grössen $c_1, c_2 \dots$ linear in den \mathfrak{R}_i sind.

Die Auflösung des Systems (14) nach den $h'_{j1,s}$ oder $h'_{j,r,s}$ gibt daher für diese Grössen Ausdrücke, welche analog zu Δh von Gleichung (8) in den \mathfrak{R}_i linear sind. Einsetzen dieser Werte in (11, 11a) ergibt daher zur Bestimmung der Zeitabhängigkeit der \mathfrak{R}_i ein homogenes lineares System von Differentialgleichungen von der Form

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\mathfrak{R}_1}{dt} &= A_{11}\mathfrak{R}_1 + A_{12}\mathfrak{R}_2 + \dots + A_{1n}\mathfrak{R}_n \\ \frac{d\mathfrak{R}_2}{dt} &= A_{21}\mathfrak{R}_1 + A_{22}\mathfrak{R}_2 + \dots + A_{2n}\mathfrak{R}_n \\ \dots & \\ \frac{d\mathfrak{R}_n}{dt} &= A_{n1}\mathfrak{R}_1 + A_{n2}\mathfrak{R}_2 + \dots + A_{nn}\mathfrak{R}_n \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

wobei die Koeffizienten A_{11} bis A_{nn} nur von den Härtekonstanten J_1 der einzelnen Federn abhängen, sowie von den Relaxationszeiten τ_i , welche den einzelnen Federn, je für sich selbst genommen, zukommen würden.

Die Lösung eines solchen Systems ist analog zu Gleichung (10). Es ergibt sich also auch für \mathfrak{R}_n , die Kraft, welche das Gesamtsystem im Anschluss an eine rasch an dem Punkte P_n vorgenommene Verschiebung auf diesen Punkt ausübt, eine Gleichung vom Typus (1).

Die Kraft, welche auf den Punkt P_n im Anschluss an eine rasch vorgenommene Verschiebung desselben ausgeübt wird, lässt sich also nicht unterscheiden von der Kraft, die sich ergeben würde, wenn der Punkt P durch ein einfaches System parallel wirkender relaxierender Federn mit der Wand W verbunden wäre.

Für die Beschreibung des viskos-elastischen Verhaltens hochpolymerer Substanzen folgt daraus, dass das Auftreten eines Relaxa-

tionszeitspektrums zwar ein Beweis dafür ist, dass in der Substanz parallel zueinander wirkende Zusammenhaltsmechanismen mit verschiedener Relaxationszeit vorkommen, dass sich aber der Parallelwirkung von Mechanismen in beliebig komplizierter Weise eine Serieschaltung zu einem Netz überlagern kann, ohne dass dies durch Analyse des mechanisch-elastischen Verhaltens festgestellt werden kann. Eine solche Analyse kann also, auch wenn sie hinsichtlich des Ergebnisses Gleichung (1) völlig korrekt ist, nicht als Beweis für das Vorliegen bestimmter in wohl definierter Weise miteinander gekoppelter Zusammenhaltsmechanismen verwendet werden. Es gibt stets sehr viele, voneinander inhaltlich ganz verschiedene Systeme elastischer Federn, welche hinsichtlich des Ergebnisses Gleichung (1) genau übereinstimmen. Die einfachste Interpretation eines Relaxationszeitspektrums ist stets die Annahme parallel zueinander wirkender Zusammenhaltsmechanismen. Kompliziertere Deutungen sind aber nie ausgeschlossen, stellen jedoch andererseits, wenn nicht zwingende modellmässige Gründe für die Annahme grösserer Kompliziertheit vorliegen, gegenüber der einfachsten Deutung weder eine Notwendigkeit noch eine Bereicherung der experimentell zu erwartenden Erscheinungen dar.

Wir haben in den vorangehenden Betrachtungen die bei der Bewegung der Federn und Reibungsmechanismen auftretende kinetische Energie vernachlässigt. Das Ergebnis würde durch die Berücksichtigung des Auftretens von Beschleunigungskräften nur unwesentlich geändert. Die Relaxationszeiten können in diesem Falle teilweise komplexe Werte erhalten (auftreten gedämpfter periodischer Schwingungen gemäss Gleichung 1). Formell sieht man, dass bei Berücksichtigung der Beschleunigungskräfte der Ansatz (12) durch Hinzufügung der Grössen $m_i \cdot h_i'' + m_{i+1} h_{i+1}'' + \dots$ auf der linken Seite jener Gleichung ergänzt werden muss. In ähnlicher Weise sind die Gleichungen (11) durch die der Beschleunigung der Masse Rechnung tragenden Glieder $m_i h_i''$ zu ergänzen. All dies lässt den in bezug auf h_i und \mathfrak{R}_i homogenen linearen Charakter der Gleichungen und daher die Form des Lösungssystems unverändert.

Zusammenfassung

Ein System von beliebig vielen elastischen Federn, von denen jede einen Reibungsmechanismus trägt, kann in beliebig komplizierter Weise dadurch zu einem Gesamtsystem vereinigt sein, dass die mit Reibungsmechanismus ausgerüsteten Federn teils parallel, teils in Serie zu Aggregaten zusammengefasst werden und dass diese Aggregate wieder teils parallel, teils in Serie zu höheren Einheiten zusammengefasst werden usw. Es wird gezeigt, dass die Gesamtwirkung eines solchen Systems nach aussen dieselbe ist wie die Wirkung eines

Systems, welches aus lauter parallel zueinander geschalteten, je einen Reibungsmechanismus tragenden Federn besteht. Der zeitliche Verlauf der Spannung, welche anschliessend an eine rasch erzeugte Dehnung beobachtet wird, lässt sich nämlich in allen diesen Fällen durch eine Beziehung vom Typus der Gleichung (1) darstellen.

Basel, Physikalisch-chemisches Institut der Universität.

59. Krystalsymmetrie und Eigensymmetrie der Molekeln

von E. Brandenberger.

(17. I. 47.)

Im Verlaufe von Krystallstrukturbestimmungen werden immer wieder Fälle namhaft gemacht, bei welchen die Eigensymmetrie der Molekeln oder Radikale, wie sie diesen aus chemischen Erwägungen zugeschrieben wird, mit der am entsprechenden Krystall feststellbaren Symmetrie in Widerspruch zu stehen scheint. Um die beiderlei Tatsachen miteinander in Einklang zu bringen, wird in neuerer Zeit bevorzugt zur Annahme gegriffen, es liege eine nicht streng nach den Gesetzen der Strukturtheorie gebaute Krystallstruktur vor. Dabei wird insbesondere der Befund einer hohen (z. B. kubischen oder wirteligen) Krystalsymmetrie bei nicht entsprechend hoher Symmetrie der Molekeln selber als Ergebnis einer bloss statistisch-unregelmässigen Anordnung der Molekeln hinsichtlich ihrer gegenseitigen Stellung zueinander angesehen oder aber als Folge einer Rotation der Molekeln um bestimmte ausgezeichnete Achsen betrachtet. So hat auch neuerdings wieder *W. Nowacki* im Fall des Chinolidins¹⁾ diese Schlussweise angewandt, um die kubische Krystalsymmetrie dieser Verbindung bei bloss vier Molekeln von der Eigensymmetrie C_{3v} — $3m$ in der Elementarzelle zu deuten (die Annahme der trigonalen Molekelsymmetrie C_{3v} wird dabei aus den Ergebnissen der Erkundung der chemischen Konstitution übernommen). Obgleich diese Deutung zutreffen kann, legt doch auch dieses Beispiel nahe, erneut²⁾ darauf hinzuweisen, dass auf Grund der beobachtbaren Daten derartige Folgerungen keineswegs als eindeutig begründet gelten dürfen. Es sind vielmehr hier und in andern Fällen in mehrfacher Richtung Einwände zu berücksichtigen:

1. Zunächst dahin gehend, dass sich auch bei der von *W. Nowacki* untersuchten Verbindung wie in vielen analogen und ähnlich ausgewerteten Fällen der Nachweis einer kubischen Symmetrie des Krystalls allein darauf gründet, dass neben dem optisch isotropen Verhalten der Verbindung die Interferenzen ihres Pulverdiagramms sich einem kubischen Gitter zuordnen lassen. Das aber heisst einzig, dass die Metrik des Gitters (die Gitterform) kubisch ist, besagt indes noch längst nicht, dass unter allen Umständen kubische Symmetrie vorzuliegen braucht, indem ja ganz allgemein kubische Metrik eine zwar notwendige, jedoch keineswegs hinreichende Bedingung für eine kubische Symmetrie darstellt³⁾. Selbst eine bloss pseudokubische Symmetrie wird durch die Feststellung einer kubischen Metrik noch nicht bewiesen, auch dann nicht, wenn innerhalb des Nachweisbaren optisch ein isotropes Verhalten gefunden wird⁴⁾.

2. Dazu kommt, dass aus dem Fehlen aller Interferenzen mit gemischten Indizes nur dann auf eine allseits flächenzentrierte Translationsgruppe geschlossen werden darf,

¹⁾ *W. Nowacki*, *Helv.* **29**, 1798 (1946).

²⁾ *E. Brandenberger*, *Schweiz. Mineralog. Petrogr. Mitt.* **13**, 91 (1933).

³⁾ *E. Brandenberger*, *Z. Kr. [A]* **76**, 1 (1930) und *Angewandte Kristallstrukturlehre*, Berlin 1938.

⁴⁾ *E. Brandenberger*, *Schweiz. Mineralog. Petrogr. Mitt.* **26** (1946) (im Druck).